2018年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)　试卷

(课程代码 00023)

本试卷共3页，满分100分，考试时间150分钟。
考生答题注意事项：
1．本卷所有试题必须在答题卡上作答。答在试卷上无效，试卷空白处和背面均可作草稿纸。
2．第一部分为选择题。必须对应试卷上的题号使用28铅笔将“答题卡”的相应代码涂黑。
3．第二部分为非选择题。必须注明大、小题号，使用0．5毫米黑色字迹签字笔作答。
4．合理安排答题空间。超出答题区域无效。

第一部分选择题

一、单项选择题：本大题共5小题。每小题3分。共15分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．在空间直角坐标系中，点(6，-1，2)关于Y轴的对称点的坐标是
A．(-6，1，-2)　　B，(-6，-1，2)
C．(-6，1，2)　　D．(-6，-1，-2)

2．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} x\cos\frac{1}{xy}$

A．等于0　　B．等于1　　C．等于1/3　D．不存在

3．设积分区域D是由 $x=\sqrt{2-y^2}$ 及坐标轴所围第一象限区域，二重积分 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,d\sigma$ 化为极坐标下的二次积分为

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} f(r^2)\,dr$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} f(r^2)\,r dr$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2} f(r^2)\,r dr$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2} f(r^2)\,dr$

4．以y=sin3x为特解的微分方程是
A．Y”+9y’=0　　B．Y”一9y’=0
C．Y”+9y=0　　D．Y”一9y=0

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}x^n$ 的收敛域是

A．(一3，3]　 B．[一3，3)　 C．(一3，3)　D．[一3，3]

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 5 空，每空 2 分，共 10 分。

6．已知向α ={2，一4，α }，β ={1，一2，一3}，且α ×β =0，则常数α =________.

7. 已知函数 $u=xy^2$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ =____________.

8. 二次积分 $\int_0^1 dy\int_0^y 2y dx$ 的值是____________.

9．微分方程 Y” =e^{2x} 的通解 y=________.

10．无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ 的和 S=________.

三、计算题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

11．已知直线 L 经过点 P，(1，-1，3)和 P：(2，3，-5)，求直线 L 的方程.

12．已知函数 $z=f(y\sin x, x\cos y)$，其中 f 为可微函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

13．求曲线 x=3t^2, y=$\dfrac{5-t}{t}$, $z=\dfrac{t-t^2}{3+t}$ 在对应于 t=1 的点处的法平面方程.

14．问在空间的哪些点上，函数 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度垂直于 x 轴.

15．计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 d\sigma$，其中积分区域 D：若 x^2=y^2≤3.

16. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (|x|+|y|+|z|)dv$，其中积分区域 $\Omega: |x|\leqslant 2, |y|\leqslant 2, |z|\leqslant 2$.

17．计算对弧长的曲线积分 $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$，其中 C 是曲线 $y=\sqrt{9-x^2}$.

18. 计算对面积的曲面积分 $\iint\limits_\Sigma (2x+2y+4z+3)dS$，其中 $\sum$ 是平面 $x+y+2z-1=0$ 在第一卦限中的部分.

19. 求微分方程 $x^2\dfrac{dy}{dx}+3xy=2e^{x^2}$ 的通解.

20．求微分方程 y” -y=0 的通解.

21．判断无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 是否收敛，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛

22. 已知周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi \leqslant x < 0, \\ x+1, & 0 \leqslant x < \pi,\end{cases}$$

$S(x)$ 是 $f(x)$ 傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的和函数，求 $S(-5\pi)$.

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 5 分。共 15 分。

23．证明球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上任意点处的法线过球心。

24．验证 $y^2dx+2xydy$ 在整个 oxy 平面内是某个二元函 $u(x,y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x,y)$.

25．将函数 $f(x)=\frac{1}{4-x}$ 展开为 $(x+1)$ 的幂级数.

2018年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

(课程代码　00023)

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题3分,共15分。

1. D　　2. A　　3. B　　4. C　　5. B

二、填空题:本大题共5空,每空2分,共10分。

6. -6　　7. $2y$　　8. $\frac{2}{3}$　　9. $\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$　　10. $\frac{1}{3}$

三、计算题:本大题共12小题,每小题5分,共60分。

11. 解:$\because$ L 的方向向量 $\mathbf{S}=\overrightarrow{P_1P_2}=\{1,4,-8\}$　　(2分)

$\therefore$ L 的方程为:$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-8}$　　(3分)

12. 解:$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y\cos x+f_2'\cdot\cos y$

$=y\cos x\cdot f_1'+\cos y\cdot f_2'$　　(2分)

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\sin x+f_2'\cdot(-x\sin y)$

$=\sin x\cdot f_1'-x\sin y\cdot f_2'$　　(3分)

13. 解:因为$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=6$　　$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=-5$　　$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1}=-\frac{1}{4}$　　(2分)

且曲线上对应于 $t=1$ 的点为$(3,4,0)$,该点处的法平面的法向量为$\{6,-5,-\frac{1}{4}\}$

所以该点处的法平面方程为$6(x-3)-5(y-4)-\frac{1}{4}(z-0)=0$　　(3分)

即　$24x-20y-z+8=0$

14. 解:$u_x=3x^2-3yz,u_y=3y^2-3xz,u_z=3z^2-3xy$

则 $\mathbf{grad}u=\{3x^2-3yz,3y^2-3xz,3z^2-3xy\}$　　(2分)

又 x 轴上单位向量 $\mathbf{e}=\{1,0,0\}$,则

$\mathbf{grad}u\cdot\mathbf{e}=0$,即 $3x^2-3yz=0$

所以在空间曲面 $x^2=yz$ 的点处,函数 u 的梯度垂直于 x 轴.　　(3分)

15. 解：$\iint\limits_{D} x^2 \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cos^2\theta r \mathrm{d}r$ （2 分）

$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^3 \mathrm{d}r$

$= \dfrac{9}{4}\pi$ （3 分）

16. 解：$\Omega_1: 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 2.$

$\iiint\limits_{\Omega} (|x| + |y| + |z|) \mathrm{d}v$

$= 8 \iiint\limits_{\Omega_1} (x + y + z) \mathrm{d}v$

$= 8 \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^2 (x + y + z) \mathrm{d}z$ （3 分）

$= 24 \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^2 z \mathrm{d}z$

$= 192$ （2 分）

17. 解：曲线 $C: x^2 + y^2 = 9, y \geqslant 0.$

$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}s = \int_C e^3 \mathrm{d}s$ （2 分）

$= e^3 \int_C \mathrm{d}s$

$= 3\pi e^3$ （3 分）

18. 解：$\sum : x + y + 2z - 1 = 0$，即 $x + y + 2z = 1$，则 $z = \dfrac{1}{2}(1 - x - y)$

$D_{xy}: 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x$

$\iint\limits_{\Sigma} (2x + 2y + 4z + 1) \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} 5 \mathrm{d}S$

$= 5 \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}\sigma$ （3 分）

$= 5 \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{\sqrt{6}}{2} \mathrm{d}\sigma$

$= 5 \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{5}{4}\sqrt{6}$ （2 分）

19. 解：微分方程 $x^2\frac{dy}{dx}+3xy=2e^{x^2}$ 可化为 $\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x^2}e^{x^2}$.

则通解为：$y=e^{-\int\frac{3}{x}dx}\left(\int\frac{2}{x^2}e^{x^2}e^{\int\frac{3}{x}dx}dx+C\right)$ （3 分）

$=x^{-3}\left(\int\frac{2}{x^2}e^{x^2}\cdot x^3dx+C\right)$

$=x^{-3}(e^{x^2}+C)$ （2 分）

20. 解：所给微分方程的特征方程为 $r^2-1=0$,

其根为 $r_1=-1, r_2=1$. （3 分）

则所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$. （2 分）

21. 解： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 为交错级数.

$\because$ $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 收敛. （3 分）

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 条件收敛. （2 分）

22. 解：$\because$ $f(x)$ 为 2π 为周期的周期函数，又 -5π 为 $f(x)$ 的间断点，

$\therefore$ $S(-5\pi)=S(\pi)$ （2 分）

$=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

$=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

$=\frac{-2+\pi+1}{2}$

$=\frac{\pi-1}{2}$ （3 分）

四、综合题：本大题共3小题，每小题5分，共15分。

23. 证明：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，则球面上任意点(x_0,y_0,z_0)处的法线的方向向量为$\{2x_0,2y_0,2z_0\}$，

从而法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0}$$ (3分)

又球心$(0,0,0)$满足法线方程，则法线过球心. (2分)

24. 解：设 $P(x,y)=y^2, Q(x,y)=2xy$.

$\because \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y=\frac{\partial P}{\partial y}$ 在整个 oxy 平面内成立

$\therefore \quad y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$ 在整个 oxy 平面内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分. (2分)

且可取 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$

$$=\int_0^y 2xy\mathrm{d}y$$

$$=xy^2$$ (3分)

25. 解：$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{5-(x+1)}$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{5}}$$ (2分)

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n} \qquad |x+1|<5$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{n+1}}(x+1)^n \qquad -6<x<4$$ (3分)