离散数学
2017 年 10 月真题及答案解析

单项选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。

1. 令 P：他怕困难，q：他战胜困难，命题“他战胜困难是因为他不怕困难”的符号化形式为（）。

A. $\neg p \to q$

B. $\neg q \to p$

C. $\neg p \wedge q$

D. $\neg p \vee q$

答案：A

解析：“他不怕困难”是“他怕困难”的否定式，命题“他战胜困难是因为他不怕困难”化成基本结构为“因为他不怕困难，所以他战胜困难”，典型的蕴涵式。因此，符号化形式为，选 A。

2. 令 F(x)：x 为苹果，H(x,y)：x 与 y 完全相同，L(x,y):x=y，则命题“没有完全相同的苹果”的符号化形式为（）。

A. $\neg \exists x \exists y (F(x) \wedge F(y) \wedge L(x,y) \to H(x,y))$

B. $\neg \exists x \exists y (F(x) \wedge F(y) \wedge \neg L(x,y) \wedge H(x,y))$

C. $\neg \exists x \exists y (F(x) \wedge F(y) \wedge \neg L(x,y) \to H(x,y))$

D. $\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \wedge \neg L(x,y) \wedge \neg H(x,y))$

答案：B

解析：本题命题“没有完全相同的苹果”中，没有指明个体域，因而采用全总个体域。其中“相同的苹果”需要任意两个苹果进行比较，即是“两个苹果”同时“非同一个苹果”且“完全相同”，符号化为“$\exists x \exists y (F(x) \wedge F(y) \wedge \neg L(x,y) \wedge H(x,y))$”；“没有”为否定词；则“没有完全相同的苹果”符号化为“”，因此选 B。

3. 一棵树有 2 个 4 度结点，3 个 3 度结点，其余为树叶，则该树中树叶个数是（）。

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

答案：C

解析：根据无向树的定义，2 个 4 度结点可以组成“廾”树状，3 个 3 度节点可以通过“廾”6 个结点中选择任意 3 个结点上分别悬挂 2 片树叶即可。这样树叶总个数为 9。故选 C。

4. 设集合 A={a,b,c,d}，现有 A 上的二元关系 R={<a,b>,<b,c>,<c,b>,<b,a>,}，则 A 是（）。

A. 自反的

B. 对称的

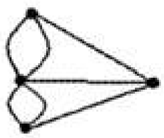
C. 反对称的

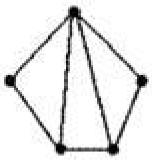
D. 传递的

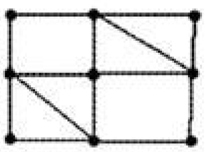
答案：B

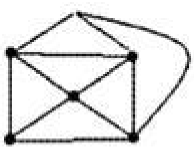
解析：二元关系 R 中典型满足 $\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x,y> \in R \rightarrow <y,x> \in R)$，即满足对称的关系的定义。故选 B。

5. 下图中为欧拉图的是（）。

A. A. 

B. B. 

C. C. 

D. D. 

答案：C

解析：根据欧拉图的定义，具有欧拉回路的图为欧拉图，其充分必要条件是连通的且不含有奇度顶点。而 ABD 三个选项中均有奇度顶点，故选 C。

6. 下列谓词公式中，不是前束范式的为（）。

A. $\forall x\ \forall y(A(x)\rightarrow B(y))$

B. $\forall x\ \exists y(A(x)\wedge B(y))$

C. $\forall x\ \exists\ y(A(x)\wedge B(y)\rightarrow C(z))$

D. $\forall\ x\exists\ y(A(x)\wedge B(y)\rightarrow\exists zC(z))$

答案：D

解析：根据一阶逻辑前束范式的定义，所有约束量词只能在公式最前面，后面公式不能出现量词，排除选项 ABC，故选 D。

7. 表示集合之间关系的图是（）。

A. 文氏图

B. 哈斯图

C. 欧拉图

D. 树

答案：A

解析：根据集合代数理论，表示集合之间关系与运算的图为文氏图，故选 A。

8. 无向完全图 K_6 的边的条数为（）。

A. 10

B. 15

C. 20

D. 30

答案：B

解析：根据无向完全图的定义，可以 6 结点中每一个都与其余 5 个相邻接，其边数计算公式为 n(n-1)/2，带入 n=6，则为 15，故选 B。

9. 设 T 是 n 阶树(n≥2)，则 T 不具有的性质是（）。

A. 连通图

B. 哈密顿图

C. 有 n－1 条边

D. 至少有两片树叶

答案：B

解析：根据树的定义及等价命题，n 阶树一定是连通的，且有 n-1 条边，至少有两片树叶，但不会有回路，因此不是哈密顿图（具有哈密顿回路的图），故选 B。

10. 设 R、S 均为集合 A 上的二元关系，下面命题正确的是（）。

A. 若 R 与 S 是自反的，则 $R \circ S$ 也是自反的

B. 若 R 与 S 是反自反的，则 $R \circ S$ 也是反自反的

C. 若 R 与 S 是对称的，则 $R \circ S$ 也是对称的

D. 若 R 与 S 是传递的，则 $R \circ S$ 也是传递的

答案：A

解析：根据二元关系的运算规律，两个二元关系的右复合只有自反性保持不变，故选 A。

11. 以下关于图的矩阵的描述，正确的是（）。

A. 邻接矩阵即关系矩阵

B. 可达矩阵是针对无向图的

C. 无向图有邻接矩阵

D. 可达矩阵是针对有向图的

答案：C

解析：根据图的矩阵的描述理论，邻接矩阵与关系矩阵是不同的，无向图与有向图都有关系矩阵，邻接矩阵仅应用于有向图，故选 C。

12. 一个 6 阶连通图的边数至少为（）。

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

答案：B

解析：根据连通图的概念，必须存在 6 个顶点至少经过一次的通路，最简单的通路就是 6 个点用 5 条线连接而没有圈的情况，故选 B。

13. 下列关于反函数的命题，正确的是（）。

A. 单射函数有反函数

B. 任意函数均有反函数

C. 满射函数有反函数

D. 双射函数有反函数

答案：D

解析：根据反函数的定义，双射函数有反函数，双射函数的反函数也是双射函数，故选 D。

14. 一个 6 阶图，其各结点度数之和不可能为（）。

A. 10

B. 12

C. 15

D. 20

答案：C

解析：根据欧拉握手定理，无向图的各结点度数之和等于边数的 2 倍，因此总度数不会是奇数，故选 C。

15. 在整数集合 Z 上定义*运算如下：a、b∈Z，a*b=a+b－10，则代数系统<Z,*>是（）。

A. 格

B. 环

C. 域

D. 群

答案：D

解析：根据运算规律 a*b=a+b－10，可以看到具有单位元：由 a*e=a 推出 e=10，同时具有逆元：由 a*a-1=e 推出 a-1=20-a，既有单位元又有逆元，恰为群的定义，故选 D。

填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

16. 设Σ={a,b}是字母表，Σ*表示由Σ上的字符构成的有限长度的串的集合（包含长度为 0 的串，即空串在内），A={a,b,aa,bb,aaa,bbb}，B={ω｜ω∈Σ*∧|ω|≥2}，C={ω｜ω∈Σ*∧|ω|≤2}，则 A－(B∩C) =________。

答案：{A,B,AAA,BBB}

解析：根据题意，B∩C =｛所有长度为 2 的字符串｝=｛aa,bb,ab,ba｝，则 A－(B∩C)= {a,b,aaa,bbb}。

17. 在整数域中，命题公式 $\forall x \exists y(x \bullet y = 0)$ 的真值为________，命题公式 的真值为________。

答案：T，F

解析：根据命题公式的意义，第一个公式表示对任意一个 x 存在一个 y 与之相乘为 0，显然在整数域中只要取 y=0 即可满足，因此是正确的；第二个公式表示存在一个 x 与任意一个 y 相乘为 1，显然在整数域是不可能实现的，因此是错误的。

18. 设 A 为非空有限集合，P(A)为 A 的幂集，∪为集合的并运算，群<P(A)，∪>中，单位元是________，零元是________。

答案：，A

解析：根据单位元定义，设任意集合 $B \in P(A)$，则由即 为单位元；根据零元的定义，设任意集合 即 A 为零元。

19. 一个手镯等距离地镶嵌着 5 颗彩珠，每颗彩珠可以从红、白、蓝、绿、黄 5 种颜色中挑选。如果要求手镯上的彩珠颜色都不相同，则可以构成________种不同颜色彩珠分布的手镯。

答案：120

解析：颜色集合由红、白、蓝、绿、黄 5 种颜色组成，根据排列组合知识可得 5！=120。

20. 某连通平面图有 6 个顶点，其平面表示中共有 8 个面，则其边有________条。

答案：12

解析：根据连通平面图的欧拉定理：顶点数－边数＋面数=2，可得边数=6+8-2=12。

21. 设有集合 A={a,b,c,d}上的二元关系 R={<a,b>,<b,a>,<c,c>,<d,d>}，则 R2=______，R3=______。

答案：{<A,A>,<B,B>,<C,C>,<D,D>}，{<A,B>,<B,A>,<C,C>,<D,D>}

写出二元关系 R 的关系矩阵 $M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，

则 R^2 的关系矩阵 $M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，

解析：R^3 的关系矩阵 $M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 于是
R2={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>}，R3={<a,b>,<b,a>,<c,c>,<d,d>}

22. 为了从无向完全图 K6 中得到其生成树，至少需要删除_______条边

答案：10

解析：无向完全图 K6 共有边数为 n(n-1)/2=15 条，而有 n 个顶点的树有 n－1 条边，即有 6－1=5 条边，所以至少要删除 15－5=10 条边。

23. 设有集合 A={a,b,c}上的二元关系 $R1=\{<a,b>,<a,c>,<c,b>\}$，则 R1 的自反闭包 r(R1)=_______，R1 的对称闭包 s(R1)=_______。

答案：{<A,B>,<A,C>,<C,B>,<A,A>,<B,B>,<C,C>}，{<A,B>,<A,C>,<C,B>,<B,A>,<C,A>,<B,C>}

写出二元关系 R1 的关系矩阵 $M=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，

则 r(R1)的关系矩阵为 $M+E=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，

解析： s(R1)的关系矩阵为 $M+M^T=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，于是 r(R1)={<a,b>,<a,c>,<c,b>,<a,a>,<b,b>,<c,c>}，s(R1)= {<a,b>,<a,c>,<c,b>,<b,a>,<c,a>,<b,c>}

24. 一个无向图有 21 条边，有 3 个 4 度结点，其余结点均为 3 度，则其结点共有________个。

答案：13

解析：根据欧拉握手定理，无向图的各结点度数之和等于边数的 2 倍，设共有 x 个节点，3*4+（x—3）*3=21*2，则 x=13。

25. 设集合 A={1,2,3}，集合 B={a,b,c,d,e}，则|A×B|=________，而|P(A)×B|=________。

答案：15，40

解析：|A|=3，|B|=5，所以|A×B|=3×5=15|P(A)|=2|A|=23=8，|B|=5，所以|P(A)×B|=8×5=40

计算题：本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分。

26. 用列真值表的方法说明下列逻辑等价式成立

$(P\rightarrow(Q\rightarrow P))\Leftrightarrow(\neg P\rightarrow(Q\rightarrow\neg P))$.

答案：解：分别列出两个命题公式的真值表如下：

解析：逻辑等价式必须具有相同的真值表，这是等价式的充分必要条件。

27. 用等值演算法推导命题公式 $(P\rightarrow Q\wedge R)\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$ 的主析取范式。

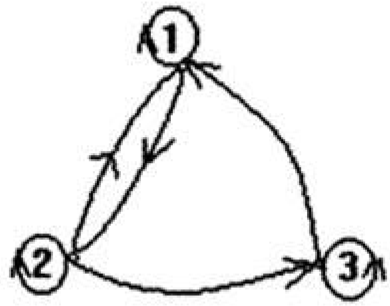
答案：

解析：利用等值式的运算规律与置换原则转换成主析取范式。

28. 设解释 I 为：个体域 D={a,b}，F(x)与 G(x)为 2 个一元谓词，且 F(a)=0，F(b)=1，G(a)=1，G(b)=0。在 I 下，求命题公式 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 的真值。

答案：解：在解释 I 下

29. 29. 设集合 S={1,2,3}，题 29 图为 S 上的二元关系 R 的关系图



题 29 图

（1）写出 R 的集合表达式；（2）写出 R 的关系矩阵。

答案：（1）由题 29 图二元关系 R 的关系图可得，R={〈1，1〉，〈2，2〉，〈3，3〉，〈1，2〉，〈2，1〉，〈2，3〉，〈3，1〉}（2）R 的关系矩阵为

解析：根据二元关系 R 的关系图的集合表达式方法与关系矩阵构造方法即得。

30. 求下述集合等式成立的充要条件，并证明结论 $(A-C)\cup B = A\cup B$ 。

答案：（1） 成立的充要条件是 。（2）现在证明以上结论.证明：

解析：根据集合的运算规律证明即可

证明题：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分。

31. 设 n 阶无向简单图 G=<V,E>，其中边数满足：|E|>(n－1)(n－2)/2，证明 G 是连通图。

答案：证明：假设 G 不是连通图，不妨设 G 有两个连通分支 G1<V1,E1>和 G2<V2,E2>，且|V1|=N1，|V2|=N2，易见 N1+N2=N，由于 N1≥1，N2≥1，所以 N1*N2-(N1+N2)+1≥0 （*）而|E1|≤N1(N1-1)/2, |E2|≤N2(N2-1)/2，从而|E|=|E1|+|E2|≤N1(N1-1)/2+ N2(N2-1)/2 由式（*）可得，N1(N1-1)/2+ N2(N2-1)/2≤[(N1+N2)2-3(N1+N2)+2]/2=(N-1)(N-2)/2，即|E|≤(N－1)(N－2)/2 这与题设条件|E|>(N－1)(N－2)/2 矛盾，故 G 是连通图。

解析：根据连通图的定义及边数计算公式即可证明。

32. 证明下列谓词公式为永真式： $\forall y(A(y)\rightarrow \exists xA(x))$ 。

答案：证明：利用谓词等值式，可得易见，这是一个永真式。所以， 为永真式。

解析：利用谓词等值式即可转换为易于判断的永真式。

33. 设 a、b、c 均为奇数，证明一元二次方程 ax2+bx+c=0 无有理数根。

答案：证明：设 AX2+BX+C=0 有有理数根，不失一般性，设根为 P/Q，这里 P，Q 均为整数，且 Q≠0，并且 P，Q 不能同时为偶数，于是 A(P/Q)2+B(P/Q)+C=0 AP2+BPQ+CQ2=0P，Q 的奇偶性有四种情况，而 A、B、C 均为奇数，于是可得下表：由此可见，AP2+BPQ+CQ2 均为奇数，AP2+BPQ+CQ2=0 不成立。所以，一元二次方程 AX2+BX+C=0 无有理数根。

解析：利用命题公式真值表的结构来证明。

综合应用题：本大题共 2 小题，每小题 7 题，共 14 分。

34. 无向树 T 有 8 片树叶，2 个 3 度分支点，其余的分支点都是 4 度，求 T 的阶数，并画出全部非同构的这种树。

答案：解：设 4 度结点有 X 个，由握手定理可得 2(8+2+X-1)=5*1+3*2+4X 解方程得 X=2，即 T 为 12 阶，全部的非同构树共有 6 棵，如下所示：

解析：先利用握手定理求出树的阶数，再按照要求画出非同构树。

35. 设<A,｜>为偏序关系，其中｜为整除关系，即 ab 当且仅当 a 整除 b。已知 A={1,2,3,5,6,15,30}，画出这个偏序关系的哈斯图，并判断其是否为格。

答案：解：根据各元素的关系，可以画出哈斯图如下：从图上可见，任意两个元素都有上确界和下确界存在，故为格。

解析：根据偏序关系的定义，画出哈斯图，再根据格的定义确定是否为格。